



**SOCIETE MATHEMATIQUE
DE COTE D'IVOIRE (SMCI)**



Concours Miss Mathématique

Edition de 2010

NIVEAU : Terminale C

Durée : 4 heures

Cette épreuve comporte trois pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3. Les cinq exercices sont indépendants.

1 RECONCILIATION

On définit le n -ième nombre de Fermat par la formule $F_n = 2^{2^n} + 1$, $n \in \mathbb{N}$.
Le but de cet exercice est de démontrer que tous les nombres de Fermat ne sont pas premiers mais que les nombres de Fermat sont deux à deux premiers entre eux puis de calculer le chiffre des unités des nombres de Fermat pour $n \geq 2$.

1. a) Calculer F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 et F_5 .
 b) Démontrer que F_5 n'est pas premier (essayer 641).
2. a) Démontrer que pour tout n , $F_{n+1} - 2 = F_n F_{n-1} \dots F_0$.
 b) En déduire que les F_n sont deux à deux premiers entre eux.
- 3) Déterminer le chiffre des unités de F_n pour $n \geq 2$. Justifier la réponse.
On donne : $2^{16} = 65\,536$ et $2^{32} = 4\,294\,967\,296$.

2 PAIX

Soit $f : [a ; b] \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue et non nulle sur $[a ; b]$.

1) On suppose que pour tout x élément de $[a ; b]$, $f(a + b - x) = f(x)$.

a) Démontrer que :
$$\int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx .$$

b) Calculer
$$\int_0^\pi \frac{x \sin x \cos x}{1 + \cos^2 x} dx .$$

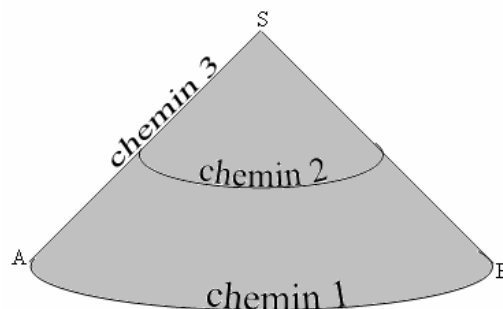
2) Démontrer que si $\int_a^b f(x)dx = 0$ alors f s'annule en au moins un point de l'intervalle $[a ; b]$ en changeant de signe.

3 FRATERNITE

Koffi doit porter secours à son ami Moussa victime d'une mauvaise chute du sommet S d'une montagne. La montagne a la forme d'un cône de révolution dont le rayon de base est égal à 1km et de hauteur h km. Koffi et Moussa sont tous les deux au pied de la montagne mais en deux points A et B diamétralement opposés. Les points A et B peuvent être reliés par trois types de chemins comme indiqué sur la figure ci-dessous :

- 1- le premier type de chemin fait un demi-tour autour de la montagne au niveau du sol ;
- 2- le second monte le versant [AS] jusqu'à la hauteur x km du sol, fait un demi-tour autour de la montagne à cette même hauteur puis descend suivant le versant [SB] jusqu'en B ;
- 3- le troisième monte le versant [AS] jusqu'au sommet puis descend l'autre versant [SB] jusqu'en B.

Quel est le chemin le plus court ?



4 SOLIDARITE

Deux pirogues partent en même temps de deux rives opposées d'un fleuve. Ils se déplacent en ligne droite perpendiculairement aux berges et à vitesse constante. L'une étant plus rapide que l'autre, elles se croisent à 320 mètres de la rive la plus proche.

Arrivées à destination, les deux pirogues restent à quai pendant 30 minutes, le temps de débarquer les passagers et d'embarquer de nouveaux passagers, puis repartent vers leurs points de départ respectifs. Elles se croisent alors à nouveau à 100 mètres de la rive la plus proche.

Quelle est la largeur de ce fleuve ?

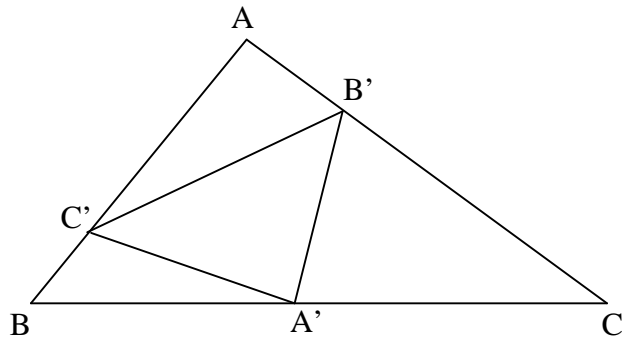
5 DEVELOPPEMENT

Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraies grandeurs :

ABC est un triangle ;

$A' \in [BC]$; $B' \in [AC]$; $C' \in [AB]$;

$BA' = \frac{1}{2} BC$; $AB' = \frac{1}{3} AC$; $BC' = \frac{1}{4} AB$.



Calculer l'aire de $A'B'C'$ sachant que l'aire de ABC est égale à 24 cm^2 .